ÉPREUVE SPÉCIFIQUE
FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

Les parties I et II sont indépendantes.

PARTIE I

Introduction

Soit $\mathcal{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$. On va s'intéresser à la recherche des solutions ou racines de l'équation $f(x) = 0$.

Il n'est pas toujours possible d'expliciter ces racines directement à partir de la connaissance de f. On essaye de les encadrer puis de construire une suite qui converge vers une racine de l'équation. Pour cela on introduit une fonction auxiliaire,

$$\Phi : \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{I}$$

appelée fonction d'itération ou fonction auxiliaire associée à f ; on remplace le problème initial par l'équation $x = \Phi(x)$ et on calcule la suite $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ après un choix judicieux de x_0.

On dira que ξ est point fixe de Φ si $\Phi(\xi) = \xi$.

1 Encadrement

On se propose d'encadrer un zéro de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$f(x) = \ln(x) - \sin(x).$$

Question 1.1:

a) Démontrez que f s'annule en un unique point $\xi \in [\pi/2, e]$.

b) Trouvez un majorant de

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

inférieur à $\sqrt{3}/2$.

c) En déduire que $[2, e]$ est un meilleur encadrement de ξ.

On définit la fonction auxiliaire définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$\Phi(x) = x - f(x).$$

Question 1.2:

a) Etudiez les variations de Φ et tracez sa courbe représentative sur $]0, \pi]$.

b) Comment déterminer graphiquement la solution de $x = \Phi(x)$?

Question 1.3: On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_0 = 1 \text{ et } x_{i+1} = \Phi(x_i), i \in \mathbb{N}.$$

Proposez une méthode graphique pour construire la suite (x_n). Représentez les points de coordonnées (x_k, x_{k+1}) pour $0 \leq k \leq 3$ sur le graphe précédent.

---

2 Cas général

Soit $a < b$ deux réels donnés et soit g une application continue de $[a, b]$ dans lui même ($g([a, b]) \subseteq [a, b]$).

Question 2.1: Montrez que l'équation $x = g(x)$ (2-1)

possède au moins une solution dans $[a, b]$.

Question 2.2: - On suppose qu'il existe une constante $K \in [0, 1[$ telle que pour tout couple (x, y) d'éléments de $[a, b]$ on ait $|g(x) - g(y)| \leq K|x - y|$. Soit $u \in [a, b]$, on considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_0 = u, \text{ et } x_{n+1} = g(x_n) \text{ pour } n \geq 0 \quad (2\text{-}2)$$

a) Démontrez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

b) En déduire que l'équation(2-1) possède une solution unique ξ dans $[a,b]$ et que la suite définie par (2-2) converge vers ξ quel que soit $u \in [a,b]$.

c) Etablir que pour $n \geq 1$,

$$|x_n - \xi| \leq \frac{K^n}{1-K}|x_1 - x_0| \tag{2-3}$$

Question 2.3: - On suppose ici que $g \in \mathcal{C}^{(1)}([a,b])$, $(g([a,b]) \subseteq [a,b])$ et

$$\sup_{x\in[a,b]} |g'(x)| < 1 \tag{2-4}$$

Montrer que :

a) $x = g(x)$ possède une solution unique $\xi \in [a,b]$.

b) La suite (x_n) étant définie comme à la question (2.2), prouvez que si $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq \xi$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\xi - x_{n+1}}{\xi - x_n} = g'(\xi). \tag{2-5}$$

On cherche à affaiblir la condition $(g([a,b]) \subseteq [a,b])$.

Question 2.4: - Soit g une application de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un intervalle ouvert $\mathcal{J}$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un point $\xi \in \mathcal{J}$ tel que $g(\xi) = \xi$ et qu'en outre $|g'(\xi)| < 1$.

Démontrez qu'il existe un intervalle $\mathcal{I} = [\xi - \epsilon, \xi + \epsilon]$ inclus dans $\mathcal{J}$ avec $\epsilon > 0$ tel que $g(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$.

Question 2.5: Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un intervalle ouvert $\mathcal{J}$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un point $\xi \in \mathcal{J}$ tel que $f(\xi) = 0$ et qu'en outre $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathcal{J}$. On considère l'application g définie sur $\mathcal{J}$ par

$$g(x) = x - f(x)/f'(x), \tag{2-6}$$

a) Montrer que ξ est point fixe de g et que $g'(\xi) = 0$.

b) Montrer qu'il existe un intervalle fermé $\mathcal{I}$ contenant ξ tel que $g(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$.

c) Soit alors $u \in \mathcal{I}$ et la suite définie par

$$x_0 = u, \text{ et } x_{n+1} = g(x_n) \text{ pour } n \geq 0. \tag{2-7}$$

Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $n \geq 0$:

$$|x_{n+1} - \xi| \leq C|x_n - \xi|^2 \tag{2-8}$$

Application: On cherche à évaluer l'inverse d'un nombre $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On utilise la fonction $f(x) = a - 1/x$ dans (2-6).

d) Etablir que x_{n+1} est un polynôme en x_n.

e) On détermine l'entier p tel que $2^{p-1} < a \leq 2^p$ et on choisit $x_0 = 2^{-p}$. Donnez un majorant de $|a^{-1} - x_n|$.

Soit f une application à valeurs réelles définie et dérivable sur un intervalle $\mathcal{J}$ de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un point $\xi \in \mathcal{J}$ tel que $f(\xi) = 0$ et qu'en outre $f'(\xi) \neq 0$.

Pour chaque entier $q \geq 2$ et chaque $(q-1)$-uplet de réels $(a_1, ..., a_{q-1})$, on considère la fonction d'itération définie sur $\mathcal{J}$ par:

$$\Phi_q(x) = x - \sum_{i=1}^{q-1} a_i \left(f(x)\right)^i. \tag{2-9}$$

Question 2.6:

a) On suppose f de classe $\mathcal{C}^1(\mathcal{J})$ et on fixe $q = 2$. Montrez que la condition $\Phi_2'(\xi) = 0$ détermine a_1 de manière unique.

b) On suppose f de classe $\mathcal{C}^2(\mathcal{J})$ et on fixe $q = 3$. Montrez que la condition $\Phi_3'(\xi) = \Phi_3''(\xi) = 0$ détermine a_1 et a_2 de manière unique.

c) Plus généralement, on suppose f de classe $\mathcal{C}^q(\mathcal{J})$ $(q \geq 2)$. Déterminez les coefficients a_j de telle sorte que toutes les dérivées de Φ_q jusqu'à l'ordre $(q-1)$ soient nulles en ξ.

Question 2.7: On se place dans les conditions de la question précédente. Montrez qu'on peut trouver un $\epsilon > 0$ tel que si $u \in [\xi - \epsilon, \xi + \epsilon]$, la suite $x_0 = u$ et $x_{n+1} = \Phi_q(x_n)$ converge vers ξ et si $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq \xi$, alors

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\xi - x_{n+1}}{(\xi - x_n)^q} = (-1)^{q-1} \frac{\Phi_q^{(q)}(\xi)}{q!}. \tag{2-10}$$

---

3 Application aux polynômes

Soit

$$p(x) = x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}$$

un polynôme à coefficients réels de degré $n > 2$. On suppose que $p(x)$ a toutes ses racines réelles et deux à deux distinctes. Soient $\xi_1 < \xi_2 ... < \xi_n$ ces racines classées par ordre croissant et $p'(x)$ la dérivée de $p(x)$.

Question 3.1:

a) Montrez que $p'(x)$ a toutes ses racines réelles. Classez ces racines par rapport à celles de $p(x)$.

b) Montrer que si α est la plus grande racine de $p'(x)$, alors $p'(x)$ est convexe pour $x > \alpha$.

Soit g la fonction définie sur $]\alpha, +\infty[$ par:

$$g(x) = x - \frac{p(x)}{p'(x)}. \tag{3-1}$$

Pour prouver la convergence de la suite déterminée par les relations

$$x_0 \in]\xi_n, +\infty[, \text{ et } x_{n+1} = g(x_n) \text{ pour } n \geq 0 \tag{3-2}$$

c) montrer que cette suite est décroissante, que $x_n \geq \xi_n$ pour tout $n \geq 0$ et conclure sur sa limite.

Le choix de x_0 utilise le résultat suivant:

Question 3.2: Soit $a_M = \max_{i \in [1,n]} |a_i|$. Démontrez que $|\xi_n| \leq 1 + a_M$. Conclure sur le choix de x_0.

Si la racine ξ_n de p est de multiplicité m, l'itération (3-1) n'est pas définie en ξ_n.

Question 3.3: Montrez que dans ce cas on peut transformer (3-1) pour qu'elle soit bien définie en ξ_n.

Question 3.4: On cherche une approximation numérique de $\sqrt{3}$ en appliquant (3-1) à $p(x) = x^2 - 3$. Calculez les trois premiers termes de la suite avec $x_0 = 4$.

Question 3.5:

a) Même question en utilisant la fonction d'itération $\Phi(x) = x - p(x)$.

b) Expliquez les différences de comportement de g et de Φ.

---

4 - Fonctions complexes

Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^{(1)}$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes et ζ un point fixe de h tel que $|h'(\zeta)| < 1$.

Question 4.1:

a) Montrez qu'il existe ϵ tel que pour tout z_0 avec $0 < |z_0 - \zeta| < \epsilon$, on a

$$\left|\frac{h(z_0) - h(\zeta)}{z_0 - \zeta}\right| \leq \frac{1}{2}(1 + |h'(\zeta)|).$$

b) En déduire qu'il existe $0 \leq C < 1$ tel que

$$|h^n(z_0) - \zeta| \leq C^n |z_0 - \zeta|.$$

où $h^n(z) = h(h^{n-1}(z))$ pour $n > 1$.

PARTIE II

1 Equations différentielles

Une démarche analogue à celle de la première partie peut s'appliquer à la résolution d'équations différentielles.

Soit F une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{(1)}$. On s'interesse aux applications y dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ y' = F(x, y) \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1-1}$$

où y_0 est un réel donné.

Question 1.1: Calculez les solutions dans les deux cas particuliers suivants:

$$\begin{array}{lllll} \textbf{(a)} & F(x,y) & = & y+1, & y(0) = 1; \\ \textbf{(b)} & F(x,y) & = & -xy, & y(0) = 1. \end{array} \tag{1-2}$$

Soit $Y(x)$, si elle existe, une solution du problème général (1-1).

Question 1.2: Montrez que $Y(x)$ satisfait à

$$Y(x) = y_0 + \int_0^x F(t, Y(t))dt. \tag{1-3}$$

Sous certaines conditions qu'on supposera satisfaites dans la suite, l'équation intégrale (1-3) peut être résolue en lui associant la suite de fonctions

$$Y_0(x) = y_0 \tag{1-4}$$

$$Y_{n+1}(x) = \Phi(Y_n)(x) = Y_0 + \int_0^x F(t, Y_n(t))dt. \tag{1-5}$$

Question 1.3:

a) Explicitez le terme général de la suite définie par (1-4 et 1-5) dans chacun des 2 cas de la question (1).

b) Démontrez que ces suites convergent vers les solutions obtenues à la question (1.1).

Question 1.4:

Calculez la solution générale de

$$z''(x) = kz(x). \tag{1-6}$$

et discutez les 3 cas suivants : $k > 0$, $k = 0$ et $k < 0$.

Question 1.5:

a) Ecrivez (1-6) sous la forme d'un système de 2 équations différentielles du premier ordre que l'on mettra sous la forme :

$$\frac{d\vec{y}(x)}{dx} = \mathbf{A}\vec{y}(x) \tag{1-7}$$

b) Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $\mathbf{A}$.

c) En vous inspirant de la question (1.3), déterminez une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ qui converge vers la solution de (1-6) et sa dérivée et qui vérifie la condition initiale $z(0) = \alpha$ et $z'(0) = \beta$ (α et β sont deux réels donnés).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail